C7 exos supplémentaires 36p364, 43p365, 50p367

36 L'antilope Springbok

Utiliser ses connaissances • Utiliser un modèle

L'antilope Springbok détient le record du saut en longueur du monde animal, avec un saut de portée $L = 15$ m.

On réduit l'antilope à un point M soumis uniquement à son poids pendant le saut. L'origine du repère est la position initiale du point M. La vitesse initiale $\vec{v}_0$ fait un angle α au-dessus de l'horizontale.

a. À l'aide d'un schéma, déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}_0$.

b. Déterminer les équations horaires de la vitesse et de la position de M.

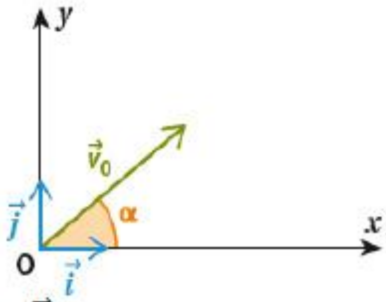
c. À quels instants l'ordonnée de M est-elle nulle ? Exprimer l'instant t_1 de réception du saut.

d. En déduire l'expression de la portée du saut (abscisse de la réception du saut).

e. En considérant que $\alpha = 45°$, déterminer v_0. L'exprimer en $km \cdot h^{-1}$.

36 a. Dans le triangle rectangle :

$\cos(\alpha) = \frac{v_{0x}}{v_0}$ et $\sin(\alpha) = \frac{v_{0y}}{v_0}$



On en déduit : $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$

b. Le système étant soumis uniquement à son poids, la deuxième loi de Newton s'écrit $m\vec{a} = \vec{P}$.

Comme $\vec{P} = m\vec{g}$, ainsi $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}$: le mouvement du système est uniformément accéléré.

Sachant que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et que $\vec{a} = \vec{g}$, on a en projection

sur les axes : $\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = -g \end{cases}$

En cherchant les primitives et en utilisant les conditions initiales ($\vec{v}(0) = \vec{v}_0$), on en déduit que :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\alpha) \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$$

Sachant que $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$, on a donc : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_0\cos(\alpha) \\ \frac{dy}{dt} = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$

En cherchant les primitives et en utilisant les conditions initiales (le système est à l'origine).

On en déduit : $\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t \end{cases}$

c. Lorsque $y = 0$, cela correspond au moment où le système décolle (à $t = 0$), puis au moment de la réception du saut (à $t = t_1$). Ainsi, $0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t$.

En factorisant par t : $0 = t\left(-\frac{1}{2}gt + v_0\sin(\alpha)\right)$

Cette équation est vraie :

- si $t = 0$;
- si $-\frac{1}{2}gt_1 + v_0\sin(\alpha) = 0$ soit $t_1 = \frac{2v_0\sin(\alpha)}{g}$.

d. La portée du saut correspond à l'abscisse de ce point, soit $x(t_1)$: $x(t_1) = v_0\cos(\alpha)t_1$

En replaçant et en simplifiant : $x(t_1) = \frac{2v_0^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}$

e. À partir de la précédente relation, on obtient :

$$v_0 = \sqrt{\frac{x(t_1)g}{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}}$$

Application numérique :

$$v_0 = \sqrt{\frac{15 \times 9{,}81}{2 \times \cos(45°) \times \sin(45°)}} = 12\ m \cdot s^{-1} = 43\ km \cdot h^{-1}$$

43 Accélération de protons

Histoire des sciences

Utiliser ses connaissances • Utiliser un modèle

L'un des premiers accélérateurs de particules utilisait un générateur de Van de Graaff pour charger les armatures d'un condensateur plan avec une tension $U = 4{,}0$ MV.

La distance entre les armatures de l'accélérateur était $L = 7{,}62$ m.

Cet accélérateur permettait d'accélérer des protons, introduits en A sans vitesse initiale dans l'accélérateur.

Cette « baguette magique » électrostatique utilise aussi un générateur de Van de Graaff pour créer un champ électrique.

Données

- Masse d'un proton : $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
- Charge électrique d'un proton : $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C

a. Laquelle des armatures est reliée à la borne positive du générateur : A ou B ?

b. Déterminer la norme du champ électrique $\vec{E}$ produit dans ce condensateur plan, puis celle de la force électrique $\vec{F}$ subie par un proton.

c. Recopier le schéma en représentant $\vec{E}$ et $\vec{F}$ en spécifiant les échelles utilisées.

d. Déterminer les équations horaires de la vitesse et de la position d'un proton.

e. En déduire la vitesse atteinte en B par le proton. Dépend-elle de la distance entre les armatures ?

f. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant une approche énergétique.

43 a. La particule étant positive, l'armature A doit être chargée positivement (et B négativement) pour qu'il y ait accélération. On en déduit que l'armature A est reliée à la borne positive du générateur.

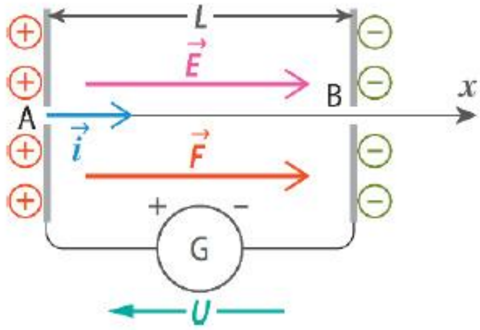
b. La norme du champ $\vec{E}$ est :

$$E = \frac{|U|}{L} = \frac{4{,}0 \times 10^6}{7{,}62} = 5{,}2 \times 10^5 \text{ V·m}^{-1}$$

La force électrique a pour norme $F = qE$.

$F = 1{,}60 \times 10^{-19} \times 5{,}2 \times 10^5 = 8{,}3 \times 10^{-14}$ N

c. En choisissant comme échelle pour le champ électrique 1 cm correspond à $2{,}5 \times 10^5$ V·m^{-1}, on obtient une flèche de longueur 2,1 cm pour le vecteur champ électrique.



En choisissant comme échelle pour la force 1 cm correspond à 4×10^{-14} N, on obtient une flèche de longueur 2,1 cm pour le vecteur force.

d. On suppose que le référentiel d'étude est galiléen. Le système étant soumis uniquement à la force électrique, la deuxième loi de Newton s'écrit $m\vec{a} = \vec{F}$.

Comme $\vec{F} = q\vec{E}$, cela donne $m\vec{a} = q\vec{E}$. Ainsi $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$.

q est positive : $\vec{a} = \frac{qU}{mL}\vec{i}$

En norme, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et $q = e$. Ainsi $\vec{a} = \frac{eU}{mL}\vec{i}$.

Il vient, en projection sur $\vec{i}$: $\frac{dv_x}{dt} = \frac{eU}{mL}$

La primitive est $v_x(t) = \frac{eU}{mL}t + C_1$ avec C_1 constante.

réécriture énoncé

43 Accélération de protons

Histoire des sciences

Utiliser ses connaissances • Utiliser un modèle

L'un des premiers accélérateurs de particules utilisait un générateur de Van de Graaff pour charger les armatures d'un condensateur plan avec une tension $U = 4{,}0$ MV.

La distance entre les armatures de l'accélérateur était $L = 7{,}62$ m.

Cet accélérateur permettait d'accélérer des protons, introduits en A sans vitesse initiale dans l'accélérateur.

Cette « baguette magique » électrostatique utilise aussi un générateur de Van de Graaff pour créer un champ électrique.

Données

- Masse d'un proton : $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
- Charge électrique d'un proton : $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C

a. Laquelle des armatures est reliée à la borne positive du générateur : A ou B ?

b. Déterminer la norme du champ électrique $\vec{E}$ produit dans ce condensateur plan, puis celle de la force électrique $\vec{F}$ subie par un proton.

c. Recopier le schéma en représentant $\vec{E}$ et $\vec{F}$ en spécifiant les échelles utilisées.

d. Déterminer les équations horaires de la vitesse et de la position d'un proton.

e. En déduire la vitesse atteinte en B par le proton. Dépend-elle de la distance entre les armatures ?

f. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant une approche énergétique.

Or la vitesse initiale est nulle : $v_x(0) = C_1 = 0$

Ainsi, $v_x(t) = \dfrac{eU}{mL}t$. Cela s'écrit aussi $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{eU}{mL}t$.

La primitive est $x(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{eU}{mL}t^2 + C_2$ avec C_2 constante.

Or la position initiale du proton est l'origine de l'axe :

$x(0) = C_2 = 0$. On en déduit que $x(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{eU}{mL}t^2$.

e. Notons $t = t_1$, l'instant où le proton se trouve à $x(t_1) = L$ (en B).

Ainsi, $x(t_1) = L = \dfrac{1}{2}\dfrac{eU}{mL}{t_1}^2$. On en déduit ${t_1}^2 = \dfrac{2mL^2}{eU}$.

À cet instant, la vitesse du proton est :

$$v_x(t_1) = \frac{eU}{mL}\,t_1 = \frac{eU}{mL} \times L\sqrt{\frac{2m}{eU}}$$

soit $v_x(t_1) = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 1{,}60 \times 10^{-19} \times 4{,}0 \times 10^{6}}{1{,}67 \times 10^{-27}}}$

$$v_x(t_1) = 2{,}8 \times 10^{7}\ \text{m·s}^{-1}$$

Cette vitesse finale ne dépend pas de la distance entre les armatures.

f. À l'instant initial, la vitesse du proton est nulle.

Son énergie cinétique $E_c(\text{I}) = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2$ est nulle.

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$E_c(\text{F}) - E_c(\text{I}) = qU_{\text{IF}}$

Or $q = e$, $U_{\text{IF}} = U$ et $E_c(\text{I}) = 0$.

On en déduit : $E_c(\text{F}) = eU$

$\dfrac{1}{2}m{v_F}^2 = eU$ soit $v_F = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$

On retrouve l'expression obtenue précédemment.

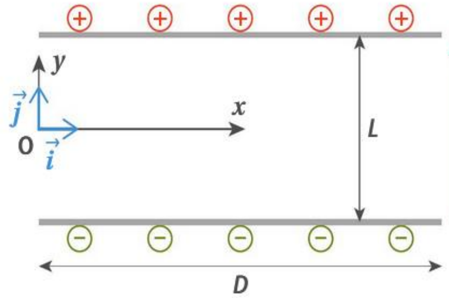
50 Détermination de la masse de l'électron

Utiliser un modèle • Exploiter un énoncé

À la fin du XIXe siècle, les premières déterminations de la masse de l'électron utilisaient la déviation d'un faisceau d'électrons dans un champ électrique.

On considère un condensateur plan dont les armatures sont distantes de $L = 4{,}00$ cm et longues de $D = 10{,}0$ cm. On leur impose une tension $U = 400$ V.

Un électron, de masse m, pénètre au point O équidistant des plaques avec une vitesse $\vec{v}_0$ parallèle aux armatures, de norme $v_0 = 2{,}50 \times 10^7$ m·s^{-1}.

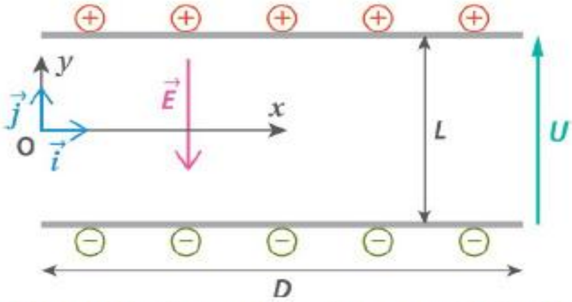


a. Reproduire le schéma et ajouter le champ électrique $\vec{E}$ engendré par le condensateur.

b. En négligeant le poids de l'électron devant la force électrique qu'il subit, montrer que l'équation de la trajectoire est $y(x) = \frac{eU}{2mL}\frac{x^2}{{v_0}^2}$.

c. L'ordonnée de l'électron au moment de sa sortie du condensateur est $y_S = 14$ mm. En déduire une valeur du quotient $\frac{e}{m}$, puis de la masse m de l'électron. La comparer avec la valeur aujourd'hui admise $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.

50 a.



b. Le système étant soumis uniquement à la force électrique, la deuxième loi de Newton s'écrit $m\vec{a} = \vec{F}$. Comme $\vec{F} = q\vec{E}$, cela donne $m\vec{a} = q\vec{E}$.

$q = -e$ et $\vec{E} = -E\vec{j}$. Ainsi, $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = \frac{eE}{m}\vec{j}$: le mouvement du système est uniformément accéléré.

Sachant que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et que $\vec{a} = \frac{eE}{m}\vec{j}$, on a en projection sur les axes : $\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{eE}{m} \end{cases}$

En cherchant les primitives et en utilisant les conditions initiales ($\vec{v}(0) = \vec{v}_0$), on en déduit que :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = \frac{eE}{m}t \end{cases}$$

Sachant que $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$, on a donc : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_0 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{eE}{m}t \end{cases}$

En cherchant les primitives et en utilisant les conditions initiales (le système est à l'origine), on en déduit : $\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 \end{cases}$

En isolant t dans la première égalité : $t = \frac{x}{v_0}$

On obtient l'équation de la trajectoire de l'électron :

$$y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

soit, comme $E = \frac{U}{L}$: $y(x) = \frac{eU}{2mL}\frac{x^2}{{v_0}^2}$

c. L'ordonnée de l'électron au moment de sa sortie du condensateur est $y_S = 14$ mm, cela correspond à $x_S = D$. On en déduit que $y_S = \frac{eU}{2mL}\frac{D^2}{{v_0}^2}$ soit $\frac{e}{m} = \frac{2L{v_0}^2 y_S}{UD^2}$.

Application numérique :

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \times 4{,}0 \times 10^{-2} \times \left(2{,}50 \times 10^7\right)^2 \times 14 \times 10^{-3}}{400 \times \left(10{,}0 \times 10^{-2}\right)^2}$$

$$\frac{e}{m} = 1{,}8 \times 10^{11}\ \text{C·kg}^{-1}$$

On en déduit la masse de l'électron : $m = \frac{e}{\frac{2L{v_0}^2 y_S}{UD^2}}$

Application numérique :

$$m = \frac{1{,}60 \times 10^{-19}}{1{,}8 \times 10^{11}} = 9{,}2 \times 10^{-31}\ \text{kg}$$

La valeur retenue étant $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg, on constate que les deux valeurs sont très proches.